Title	2-Dimensional Developmental Systemにおける二,三の決定問題 (オートマトン理論および言語理論の新展開)
Author(s)	三島, 俊雄; 西尾, 英之助
Citation	数理解析研究所講究録 (1976), 270: 102-111
Issue Date	1976-04
URL	http://hdl.handle.net/2433/105908
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

数理解析研究所講究録
270巻 1976年 102-111

2-dimensional developmental system における二、三の決定問題

京大 理 生物物理　　三島俊雄
西尾英之助

1．まえがき　developmental system を考えるのは、例えば生物における形態形成・発生現象の記述において、generative な記述であるが故に、それ以外の記述法よりも、何らかの意味で、（例えば、単に記述が簡単になるということでもよいが）利点があるのではないかという期待もあるのかも知れない。ここでは、J.W. Carlyle，S.A. Greibach，A. Paz の提起した、細胞が二分裂することにより成長する、二次元 developmental system について、おもに、次の二種のことを考えた。pattern を生成する production rule のうちで、いろいろの意味で最も簡単なものをみつけることができるということ。production rule と initial pattern が与えられると、pattern の成長の系列がきまる訳であるが、その系列が種々の性格を持つかどうかを決定することが可能であるかどうか。この二種のことについてである。後者については、ここであつかった問題は、可

解でないという結論を得た。developmental system が Turing Machine を simulate できるほど、強力なものであれば、おおむねこのような決定問題は可解でない、ということがわかる。前者については、developmental system で何か現実的なものを simulate しようと思ったとき、細胞に付与した属性に現実的解釈を与えることになるだろうが、production rule に対しても、その現実に即すように制約を課することになる。ここでは、production rule のうちで簡単なものをみつけるということを問題にした訳である。尚、論文(1)と比較して、cell の近傍数に関する制限を外したことのみ異っていることを注意しておく。

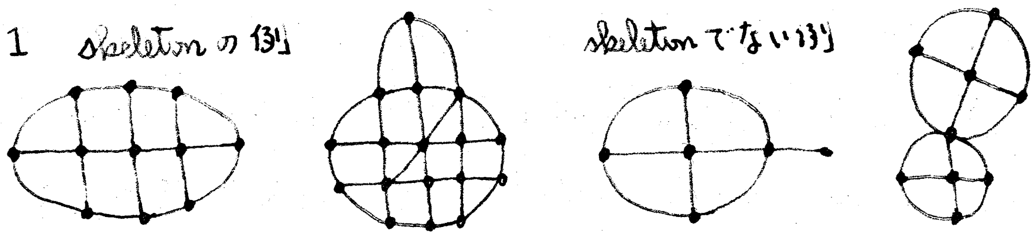
2. 2-dimensional developmental systems (C. G. P. model)

平面連結グラフで次のようなものを skeleton という。

graph の各 vertex の次数は 3 以上であり、boundary cycle (graph のすべての vertex edge が、その cycle 上または その cycle 内にあるような cycle) が存在し、その cycle のただ一つの vertex を除くと、それ以外の vertex については、その vertex に接続する edge はすべて、その cycle 上または内部にあるような cycle は、boundary cycle 以外には存在しない、という条件を満たす graph。cycle は閉じた path で、同じ vertex を二度以上

は通らないものをいう。

図1 skeletonの例　　　　skeletonでない例



分割された領域をcellといい、外部を外界という。skeletonは、有限個のcellから構成されていると考えてもよい。skeleton S は cellが分裂することによって、別のskeleton S' にかわる。それを $S \to S'$ とかく。skeletonの遷移をあらわすdiagram（図2）を <u>skeleton (transition) diagram A</u> という。ここで注意したいのは、任意のskeletonは、◯から、cellが適当に二分裂をくりかえすことによって、生成されうるということである。

図2 skeleton diagram A

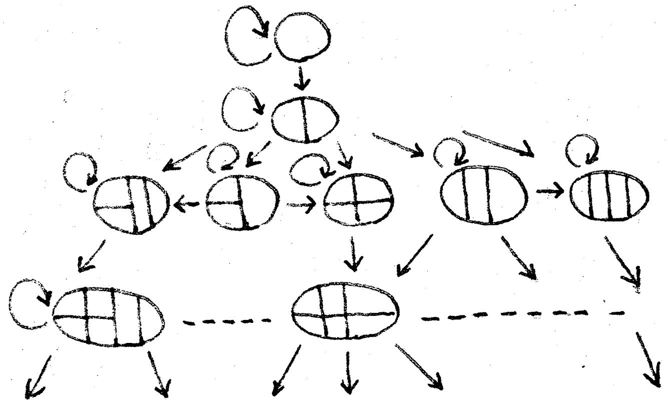
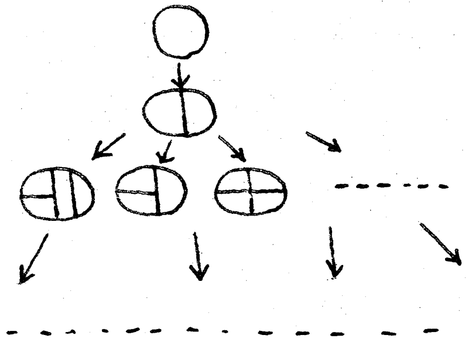


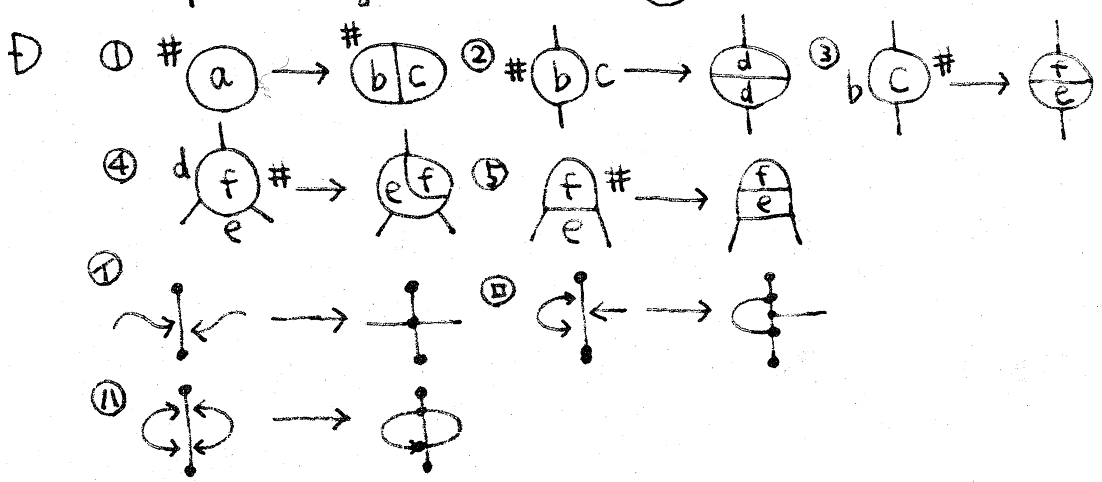
図3 skeleton diagram B



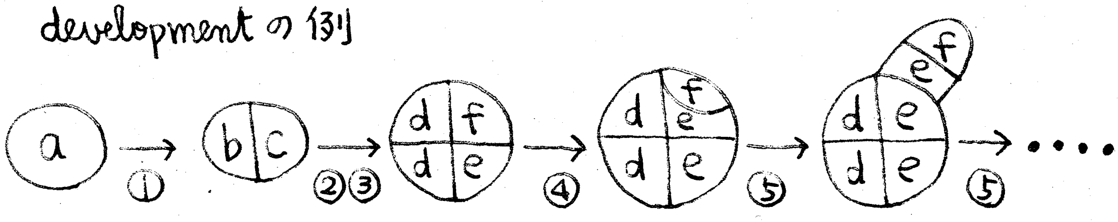
Σ はcellの属性の集合をあらわす。skeletonの中のcellの各々に、この Σ の要素を、その属性として付与したものを、<u>pattern</u> と呼ぶ。外界は#で表わす。pattern P は、production rule D に

したがって、p'に変化する。これを $p \xrightarrow{D} p'$ とかく。initial pattern を P_0 とすれば、$\langle P_0\ D \rangle$ を developmental system という。pattern P の中の cell の各々は、分裂したり、その属性をかえたりして成長していくのであるが、cell の分裂、属性ををかえるかえ方は、その cell のその時点での属性、および、そのまわりの cell のその時点での属性に関連してきまる。きまるという意味は、分裂するとすると、次なる pattern における、その cell から生成される二つの cell の属性、および、分裂壁の方向がきまり、また分裂しないとすると、次なる pattern p' におけるその cell の新しい属性がきめられるということである。次なる pattern p' の cell の属性、分裂壁の方向がきまれば、edge の editing に関する rule にしたがって、pattern p' が確定することになる。このような cell の分裂・状態遷移規則，edge の editing rule をまとめて production rule と呼ぶのである。

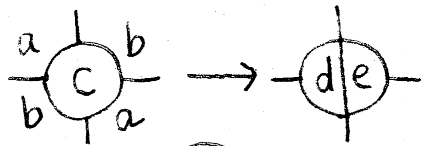
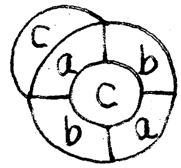
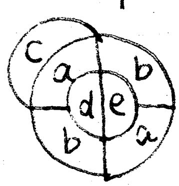
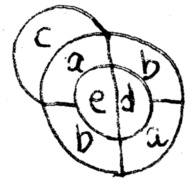
図4 developmental system の例 $\langle \overset{\#}{ⓐ}\ \ D \rangle$



development の例



このように、development においては、production rule のうち、適用できる rule はことごとく同時に適用するものとする。適用できる rule がないとき、cell は変化しない。

また、 なる rule を  に適用したとき   の二種が、あらわれることになるが、このようなことを ambiguity が生じるという。pattern P に対し、P の skelton を $\bar{P}$ で表わすことにする。skelton S, pattern P の cell 数を、それぞれ、#(S), #(P) であらわす。

3. 簡単な production rule を求める問題

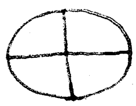
production rule D と pattern P, P′ について、次のような pattern 系列 $P_1, P_2, P_3, \cdots, P_n$ が存在するとき、$P \overset{D}{\Longrightarrow} P'$ とかく。

$$P \xrightarrow{D} P_1 \xrightarrow{D} P_2 \xrightarrow{D} \cdots \xrightarrow{D} P_n \xrightarrow{D} P'$$

［命題 1］ pattern P, P′ について、$P \overset{D}{\Longrightarrow} P'$ とするような production rule D が存在するか否かは判定可能である。

また、production rule D も構成できる。

[証明] skeleton diagram A において、$\bar{P} \to S_1 \to \cdots \to S_k \to \bar{P}'$ となるような skeleton path が存在すれば、production rule D は、$S_1, \cdots\cdots, S_k$ の cell に属性を与えることにより、自然に求められる。ambiguity をさけるためには、あらわれる cell の属性がすべて異なるようにすればよい。 Q.E.D.

以後 initial pattern を $\overset{\#}{a}$ とし固定し、$\bar{P}_A$ とかくことにする。skeleton diagram A において  から最小 k step で到達できる skeleton の rank を k ということにする。例えば  は rank 2 である。skeleton diagram A から、同一 rank 間の矢印を除いた diagram を、skeleton (transition) diagram B という。(図3)

[命題2] pattern P が与えられたとき、その pattern を導出する step 数を最小にするような production rule D は、skeleton diagram B をもとに、構成できる。

[証明] $\bar{P}$ を skeleton diagram B においてさがし、$\bar{P}_A \to S_1 \to S_2 \to \cdots \to \bar{P}$ となる skeleton path から、cell に属性を付与することにより、pattern の系列をつくることができる。これから、production rule は、自然に求められる。これが求めたいものである。

[命題3] pattern P が与えられたとき、それを導出する

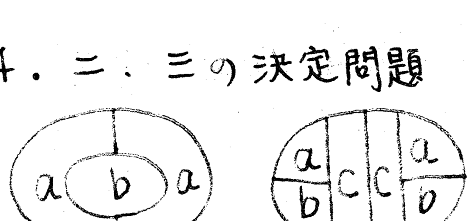
production rule のうちで、導出の途中にあらわれる cell の属性の種類の最小のものを求めることができる。

[証明] p を導出する production rule をまずつくり、この rule により導出の途中にあらわれる cell の属性の数を m とする。skeleton diagram A において、$\bar{A}$ から $\bar{p}$ にいたる path の数は、同一の skeleton を何度もくりかえすことができるので無限にあるが、ここでは、skeleton S をくりかえす回数を $m^{\#(S)}$ まで考えるだけでよい。なぜならば、これ以上くりかえすと、あらわれる symbol 数が m より大きくなるからである。このような $\bar{A}$ から $\bar{p}$ にいたる skeleton path の有限個のうちから、それに m 種の属性を、しらみつぶし的に付与してみて、あらわれる属性数最小のものを選べばよい。

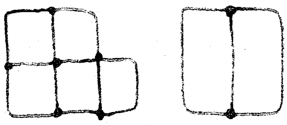
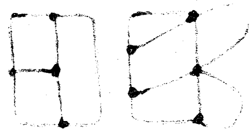
[命題4] pattern p が与えられたとき、それを導出する production rule のうちで、rule 数の最小のものを求めることができる。

[証明]　命題3と同様

4. 二、三の決定問題



等は、対称な pattern である。

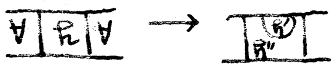
 は primitive な skeleton であり、

は primitive ではない。これは、vertex の次数で特徴づけられる。pattern が primitive であるとは、その skeleton が primitive であることをいう。

任意の Turing Machine に対し、それを simulate する developmental system を構成することができる。それは、initial pattern P_A から出発し、まず、head の位置等も含めた initial configuration にあたるものを導出する。次に、Turing Machine の動きを simulate する production rule により、計算をすすめてゆく。head が端にきたときは、その cell が分裂し、ブランクに相当する cell をその右（左）につくる。Turing Machine の停止は head の状態が h になったときであるとし、その他の状態の時の動きは、すべて定義されているものとする。

[命題5] developmental system ⟨P_A D⟩ が与えられたとき、これによりつくられる系列が ambiguous であるか否か、つまり、系列があるところで分岐するか否かを判定する algorithm は存在しない。

[証明] Turing Machine が、ある文字をかくかどうかという

問題に帰着できる。例えば、 という rule を加えておくと、文字列をかいた時のみ ambiguity が生じる。

［命題6］〈P_A D〉が与えられたとき、これによりつくられる系列が、有限生長であるか、無限生長であるかを判定する algorithm は存在しない。

［証明］Turing Machine の停止問題に帰着させる。

［命題7］〈P_A D〉が与えられたとき、これによりつくられる系列が loop にはいるか否か、つまり、系列に同じ pattern が くりかえしあらわれるか否か を決定する algorism は存在しない。

［命題8］〈P_A D〉が与えられたとき、これによりつくられる系列が、分岐することがわかっていて、しかも loop には、はいらないとするとき、この系列で、いったん分岐した後、ふたたびであうことはあるか否か（つまり、系列が

$$\begin{tikzcd} \arrow[r] & P_k \arrow[r] \arrow[dr] & P_{k+1} \arrow[r] & \cdots \arrow[dr] & \\ & & P'_{k+1} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & P_l \arrow[r] & {} \end{tikzcd}$$

のようになっているか否か）

は 決定可能ではない。

［証明］次のように遷移するような production rule をつくる。

こんどは たて方向にのびる片無限テープ上をうごくTuring Machineを考え、それが停止したら、つまり、Readが只になったら、ここで*とかいた部位を中心として対称なconfigurationを反対側につくって*の位置でReadが停止するようにする。これをdevelopmental systemでsimulateする。すると、分岐した系列上に同じpatternがあらわれるということは、このTuring Machineが停止したということになる。

[命題9] 生成される系列に、対称なpatternが、P_A以外にあらわれるか否かは、決定可能でない。

[命題10] 生成される系列に、primitive pattern以外のものが、現れるか否かは 決定可能でない。

[命題11] 生成される系列で、primitiveでないpatternがあらわれたとし、その先、primitiveなpatternがあらわれるか否かは、決定可能でない。

[命題12] $\langle P_A\ D\rangle$, $\langle P_A\ D'\rangle$が与えられたとするとき、これらが全く同じ系列をつくるか否かは 決定可能でない。

文献 (1) Carlyle, Greibach, Paz. A two-dimensional generating system modeling growth by binary cell division Proc. 15th SWAT conf 1-12 (1974)

(2) T. Mishima 2-dimensional developmental system of simulation LA sympo. 夏 予稿 (1975)